

Efecto de la curvatura espacial del universo en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo

GABRIEL A. MARIÑO* & YEINZON RODRÍGUEZ**

Resumen. El paradigma inflacionario resuelve los tres problemas clásicos de la cosmología estándar: el problema de planitud, el problema de horizonte y el problema de las reliquias no deseadas. En particular, el problema de planitud se resuelve al explicar cómo la contribución relativa de la curvatura espacial del Universo $\frac{K}{a^2 H^2}$ a la densidad total de energía decrece exponencialmente durante la inflación. Además, el escenario inflacionario nos ofrece un mecanismo eficiente para generar pequeñas perturbaciones en la curvatura espacial que explicarían las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF) observadas hoy en día. Los tradicionales modelos inflacionarios que desprecian la contribución relativa $\frac{K}{a^2 H^2}$ reproducen las recientes observaciones del satélite WMAP sobre el espectro angular C_l de las anisotropías en la temperatura de la RCF, pero fallan en los multipolos más pequeños, en donde las observaciones presentan una inesperada caída. Este extraño comportamiento nos conduce a proponer un análisis del espectro angular C_l a grandes escalas (pequeños multipolos) teniendo en cuenta la contribución relativa $\frac{K}{a^2 H^2}$, y ofrecer un mejor ajuste a los datos experimentales, evidenciando así la topología característica del Universo observado.

Abstract. The inflationary paradigm solves the three classic problems of the standard cosmology: the flatness problem, the horizon problem, and the unwanted relics problem. In particular the flatness problem is solved by

Palabras y frases claves: curvatura espacial, inflación, espectro angular, radiación cósmica de fondo.

Keywords: spatial curvature, inflation, angular spectrum, cosmic microwave background radiation.

PACS: 98.80.Cq.

* Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: gabriel_marino@hotmail.com

** Centro de Investigaciones, Universidad Antonio Nariño, Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá, y
Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co

explaining how the relative contribution of the spatial curvature of the Universe $\frac{K}{a^2 H^2}$ to the total energy density decreases exponentially during inflation. In addition, the inflationary scenario offers us an efficient mechanism to generate small perturbations in the spatial curvature that would explain the anisotropies in the temperature of the cosmic microwave background radiation (CMB) observed nowadays. The traditional inflationary models that neglect the relative contribution $\frac{K}{a^2 H^2}$ reproduce the recent WMAP observations on the angular spectrum C_l of the anisotropies in the temperature of the CMB, but fail in the lowest multipoles where the observations show an unexpected suppression. Such a strange behaviour leads us to propose an analysis of the angular spectrum C_l at large scales (low multipoles) by taking into account the relative contribution $\frac{K}{a^2 H^2}$, and offer a better adjustment to the observed data, revealing in this way the characteristic topology of our observable Universe.

1. Introducción

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) describe muy bien las propiedades de nuestro Universo observable, tales como la homogeneidad e isotropía a grandes escalas y la expansión de Hubble [1, 2]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 + \frac{Kr^2}{4}} \left[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (1)$$

en donde $a(t)$ es el factor de expansión y el parámetro K describe la curvatura espacial de nuestro Universo: un Universo esférico (cerrado) si $K > 0$, un Universo hiperbólico (abierto) si $K < 0$, o un Universo euclidiano (plano) si $K = 0$.

La ecuación de Friedman [1, 2] relaciona el parámetro de curvatura K de la métrica FRW con el parámetro de densidad de energía del Universo $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{critico}}$, de la forma:

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}, \quad (2)$$

siendo $H = \dot{a}/a$ el parámetro de Hubble. Esta ecuación nos dice que si el Universo es plano, i.e. $K = 0$, su densidad de energía será igual a la densidad crítica $\rho = \rho_{critico}$ para cualquier tiempo cósmico t . Si por el contrario $K \neq 0$, el parámetro de densidad de energía de nuestro Universo evolucionará con el tiempo al igual que la contribución relativa de la curvatura $\frac{K}{a^2 H^2}$. En general el valor de esta contribución está dado por el horizonte de partículas comóvil, el cual proporciona el campo visual para las observaciones a gran escala del Universo y depende de la expansión del mismo.

En el escenario inflacionario el Universo temprano experimentó una expansión acelerada, la cual provocó que el factor de expansión a creciera exponencialmente, mientras H era constante. Esto predice unos valores muy pequeños para la contribución relativa de la curvatura espacial $\frac{K}{a^2 H^2}$. En efecto, los datos recientes del WMAP [3] y la sonda

SDSS [4] determinaron el valor del parámetro de densidad del Universo actual como $(\Omega - 1) = 0,003 \pm 0,010$. Físicamente esto se debe al reducido horizonte de partículas heredado de la inflación, el cual dificulta la apreciación de la curvatura espacial aún hoy en día, cuando el tamaño de dicho horizonte es mucho más grande que al finalizar la inflación (por lo tanto deberíamos esperar valores aún más pequeños para $\frac{K}{a^2 H^2}$ en épocas tempranas siguiendo la evolución estándar). Este resultado observacional ha motivado que muchos modelos tradicionales inflacionarios desprecien el parámetro de la curvatura espacial del Universo K , razón motivada además por el buen ajuste teórico-observacional en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la RCF a pequeñas escalas que ofrecen los tradicionales modelos con curvatura nula.

2. Efecto de la curvatura espacial en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la RCF

Como se pretende demostrar, las observaciones a grandes escalas del contenido del Universo son las que presentan una mayor desviación de la curvatura espacial (nos interesaremos especialmente en las escalas cosmológicas más grandes, en donde se encuentran los objetos más lejanos observables), y tendrán algún efecto en el espectro angular de las anisotropías en la temperatura de la RCF, distinto al predicho por el modelo de Universo plano [5, 6].

El modelo más completo que explica las anisotropías en la temperatura de la RCF es el de un Universo Friedmann-Robertson-Walker a grandes escalas con perturbaciones en la densidad de energía, y la curvatura espacial a escalas más pequeñas (pequeñas inhomogeneidades). Las perturbaciones en la densidad de energía y la curvatura espacial están relacionadas con las anisotropías en la temperatura de la RCF $\frac{\delta T}{T}$ por el efecto de corrimiento al rojo gravitacional descrito por Sachs-Wolfe [7], y su espectro angular C_l está definido mediante el correlador de dos puntos (dado la alta gaussianidad del mapa de la RCF) entre dos temperaturas medidas en direcciones diferentes del espacio \hat{n}_1 y \hat{n}_2 :

$$\left\langle \frac{\delta T(\hat{n}_1)}{T} \frac{\delta T(\hat{n}_2)}{T} \right\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2) C_l, \quad (3)$$

en donde P_l denota los polinomios de Legendre.

El método más simple para modelar las inhomogeneidades en la densidad de energía ρ (y la curvatura espacial) supone que estas fueron impresas en el Universo temprano debido a las perturbaciones cuánticas asociadas a algún campo escalar ψ que describe dicha densidad de energía. De las ecuaciones de Einstein se obtiene una secuencia de perturbaciones de la forma $\delta\psi \rightarrow \delta\rho \rightarrow \delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta\psi$, en donde el tensor métrico perturbado

$g_{\mu\nu}$ se define mediante la expresión [2, 8]:

$$g_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 1 + 2A & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1+Kr^2/4} (1 - 2A)\delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Una perturbación adicional de interés es la del campo escalar $\delta\psi$, la cual se puede calcular a partir de la ecuación de Klein-Gordon generalizada [2, 8]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) = -V'(\psi), \quad (5)$$

donde $V'(\psi)$ denota la derivada del potencial escalar V con respecto a ψ .

Finalmente, es conveniente calcular la perturbación en la curvatura espacial comóvil de indicador invariante [9], definida como:

$$\zeta = -A - H \left(\frac{\delta\psi}{\psi} \right), \quad (6)$$

la cual mide la curvatura espacial intrínseca sobre la hipersuperficie de la última dispersión (la superficie espacial desde la cual recibimos la radiación cósmica de fondo generada en un tiempo conformal η_{UD}) y está relacionada con las anisotropías en la temperatura de la RCF medidas por un observador en (\vec{x}_0, η_0) mediante la relación de Sachs-Wolfe [7]:

$$\left(\frac{\delta T(\hat{n}, \vec{x}_0, \eta_0)}{T} \right)_{\vec{k}} = \frac{1}{5} \zeta_{\vec{k}}(\vec{x}_{UD}, \eta_{UD}) = \sum_{lm} \sum_{\beta} \zeta_{\beta}(\eta_{UD}) \Phi_{\beta}^l(|\vec{x}_{UD}|) Y_{lm}(\hat{n}).$$

En esta expresión se ha hecho una separación de variables en coordenadas esféricas de la perturbación ζ teniendo en cuenta la contribución de todos los modos, siendo las funciones angulares Y_{lm} los armónicos esféricos, y las funciones radiales Φ_{β}^l las funciones hipersféricas de Bessel. Los números de onda canónicos se definen como $\beta = \sqrt{k^2 + K}$ para un universo cerrado, y $\beta = \sqrt{k^2 - |K|}$ para un universo abierto.

Un escenario sencillo en el cual se puede calcular el espectro angular dado por la relación (3) es el escenario del curvatón [10], en el cual se desprecian las perturbaciones en la curvatura durante inflación ($A = 0$). En dicho escenario el espectro angular C_l se relaciona con el espectro de potencias P_{ζ} de la forma

$$C_l = 4\pi \int \frac{d\beta}{25\beta} |P_{\zeta}(\beta)|^2 |\Phi_{\beta}^l(\eta_0 - \eta_{LS})|^2, \quad (7)$$

donde

$$P_{\zeta}(\beta) = \frac{\beta^3}{2\pi^2} \left[\left(\frac{H}{\dot{\psi}} \right)^2 |\delta\psi_{\beta}(\eta)|^2 \right]_{\eta=\eta_*},$$

en donde se ha tenido en cuenta el hecho de que ζ es un invariante temporal para escalas

de superhorizonte¹. Para el caso de un universo cerrado se obtiene la expresión [6]

$$P_{\zeta}(\beta) = \frac{H_*^4}{2\pi\dot{\psi} \left(1 - \frac{|K|}{\beta^2}\right)^2}, \quad \frac{\beta}{\sqrt{|K|}} = 3, 4, 5 \dots, \quad (8)$$

mientras que para el caso de un universo abierto se obtiene la relación análoga:

$$P_{\zeta}(\beta) = \frac{H_*^4}{2\pi\dot{\psi} \left(1 - \frac{|K|}{\beta^2}\right)^2 \left(1 + \frac{|K|}{\beta^2}\right)}, \quad \frac{\beta}{\sqrt{|K|}} > 1. \quad (9)$$

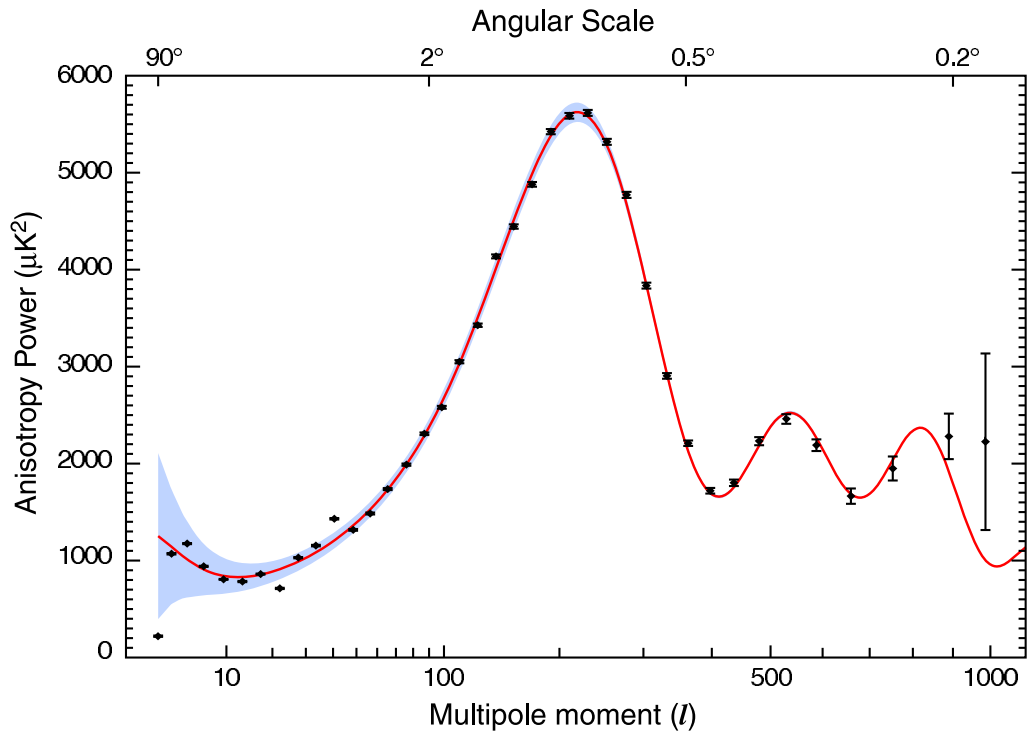


Figura 1. Espectro angular de las anisotropías de la RCF. Mayores valores del momento multipolar l corresponden a escalas más pequeñas del Universo (Cortesía del equipo WMAP de la NASA [11]). La línea continua corresponde al mejor ajuste teórico suponiendo $K = 0$.

Como se puede observar en la figura 1, el mejor ajuste teórico (línea continua) correspondiente al tradicional modelo inflacionario de materia oscura fría con $K = 0$, y no demuestra la extraña supresión a grandes escalas (pequeños multipolos) reportada por los datos del WMAP. Mediante las expresiones (7), (8), y (9) se puede demostrar que para el caso del universo cerrado la gráfica para pequeños multipolos presenta una caída

¹Con η_* se denota el tiempo conformal para el cual las escalas cosmológicas relevantes salen del horizonte.

con respecto al mejor ajuste teórico, mientras para el caso de un universo abierto la gráfica presenta un ascenso [6]. De allí que los datos experimentales indicarían que nuestro Universo observable es cerrado [5], y que la curvatura relativa al comienzo de inflación $\frac{K}{a_i^2 H_i^2}$ es muy pequeña, de manera que el nuevo mejor ajuste teórico se encuentra dentro del umbral permitido por la variancia cósmica (zona sombreada).

Agradecimientos: Este trabajo cuenta con el apoyo de COLCIENCIAS a través del proyecto de investigación No. 1102-333-18674 CT-174-2006, y de la DIF (UIS) a través del proyecto de investigación No. 5134. Y.R. agradece al programa ECOS-NORD, proyecto C06P02, por su apoyo en movilidad.

Referencias

- [1] A.R. LIDDLE & D.H. LYTH, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press (2000).
- [2] V.F. MUKHANOV, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press (2005).
- [3] D.N. SPERGEL *et al.*, “Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology”, *Astrophysical Journal Supplement Series*, 170 (377-408), 2007.
- [4] M. TEGMARK *et al.*, “Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies”, *Physical Review D*, 74 (123507), 2006.
- [5] G. EFSTATHIOU, “Is the Low CMB Quadrupole a Signature of Spatial Curvature?” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 343 (L95-L98), 2003.
- [6] E. MASSÓ, S. MOHANTY, A. NAUTIYAL & G. ZSEMBINSZKI, “Imprint of Spatial Curvature on Inflation Power Spectrum”, [arXiv:astro-ph/0609349v4](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609349v4).
- [7] R.K SACHS & A.M. WOLFE, “Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background”, *Astrophysical Journal*, 147 (73-90), 1967.
- [8] V.F. MUKHANOV, H.A. FELDMAN & R.H. BRANDENBERGER, “Theory of Cosmological Perturbations. Part 1. Classical Perturbations. Part 2. Quantum Theory of Perturbations. Part 3. Extensions”, *Physics Reports*, 215 (203-333), 1992.
- [9] J.M. BARDEEN, “Gauge Invariant Cosmological Perturbations”, *Physical Review D*, 22 (1882-1905), 1980.
- [10] D.H. LYTH & D. WANDS, “Generating the Curvature Perturbation without an Inflaton”, *Physics Letters B*, 524 (5-14), 2002.
- [11] NASA’s WMAP. homepage: <http://wmap.gsfc.nasa.gov/>.

GABRIEL A. MARIÑO
Escuela de Física, UIS,
Bucaramanga, Colombia
e-mail: gabriel_marino@hotmail.com

YEINZON RODRÍGUEZ
Centro de Investigaciones,
Universidad Antonio Nariño,
Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá, y
Escuela de Física, UIS,
Bucaramanga, Colombia
e-mail: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co